

# **I numeri indici: teoria e pratica**

# I numeri indici: cosa sono e a cosa servono?

- Si consideri un generico fenomeno  $X$  di cui si dispone di una sequenza ordinata di osservazioni, ad esempio nel tempo
  - Autovetture immatricolate tra il 1970 e il 2005
- Siamo interessati a evidenziare il comportamento del fenomeno  $X$  nel tempo
  - Variazioni assolute (differenze)
  - Variazioni relative (rapporti)
- Le differenze assolute ( $x_t - x_0$ ) sono espresse nell'unità di misura di  $x_t$ ; non è possibile il confronto tra più fenomeni:  $1010 - 1000 = 10$  ma anche  $100 - 90 = 10$
- Meglio variazioni relative ( $x_t/x_0$ ): numeri indici

# I numeri indici: cosa sono e a cosa servono?

- I numeri indici appartengono alla classe dei rapporti statistici (quoziente tra due dati)
- Sono numeri relativi, sempre positivi e non risentono dell'unità di misura (sono “numeri puri”)
- Sono impiegati per facilitare la comprensione delle variazioni relative nel tempo o nello spazio di un fenomeno
- Nell'ambito dei fenomeni economici possono rappresentare:
  - - prezzi unitari (numeri indici dei prezzi)
  - - quantità/volumi (numeri indici delle quantità)
  - - valori monetari (numeri indici dei valori)

# Classificazione in base a ciò che varia..

- Numeri indici temporali
  - descrivono l'evoluzione della medesima unità spaziale nel tempo (serie storiche)
  - numeri indici di prezzo
- Numeri indici spaziali
  - descrivono diverse unità spaziali nello stesso istante di tempo
  - numeri indici delle Parità dei Poteri d'Acquisto

# Classificazione in base al numero di fenomeni coinvolti...

- Numeri indici semplici o elementari: confrontano diverse intensità di uno stesso fenomeno
  - il prezzo di un bene nel tempo
- Numeri indici complessi: sintetizzano, mediante un'unica serie di numeri indici, le variazioni relative di più fenomeni economici
  - Numeri indici **sintetici**: se le  $n$  componenti sono di una stessa specie (es. prezzi dei beni di un paniere)
  - Numeri indici **compositi**: se le  $n$  componenti sono di specie diverse (es. indicatori di Clima di Fiducia)

# Un esempio: il clima di fiducia dei consumatori italiani (Isae)

- Situazione economica dell'Italia
  - Giudizi sui precedenti 12 mesi e previsioni sui successivi 12 mesi
- Situazione economica della famiglia
  - Giudizi sui precedenti 12 mesi e previsioni sui successivi 12 mesi
- Giudizi sullo stato del bilancio familiare
  - Giudizi sui precedenti 12 mesi e previsioni sui successivi 12 mesi
- Risparmio
  - Convenienza attuale al risparmio e possibilità nei successivi 12 mesi
- Beni durevoli
  - Convenienza ad acquisti immediati
- Prezzi
  - Giudizi sui precedenti 12 mesi e previsioni sui successivi 12 mesi
- (...)

# Come si calcolano?

- Data una insieme di osservazioni sul fenomeno  $X$  nel tempo, dividendo ciascuna osservazione per un'altra osservazione dello stesso fenomeno e moltiplicando i quozienti per una potenza di 10 (tipicamente 100)
  - numeri indici semplici
- *a base fissa* - calcolati sulla base di un denominatore comune ( $x_0$ )
- *a base mobile* - calcolati sulla base di un denominatore che cambia nel tempo (tipicamente il periodo precedente a quello di riferimento –  $x_{t-1}$ )

# Numeri indici elementari a base fissa

$${}_0I_t = \frac{x_t}{x_0}$$

0 = periodo base      
 t = periodo di riferimento

Esempio:

➤ Serie dei Prezzi

prezzo \ t	2000	2001	2002	2003	2004
Bene 1	3.45	3.64	4	4.1	4.4
Bene 2	215.1	216	220.5	220	220

➤ Serie degli Indici

Indice \ t	2000	2001	2002	2003	2004
Bene 1	100	105.5	115.9	118.8	127.5
Bene 2	100	100.4	102.5	102.3	102.3

$${}_{2000}I_{2001} = \frac{3.64}{3.45} = 1.055 * 100 = 105.5$$

(periodo base 2000=100)



# Numeri indici e loro variazioni

- Per rendere più immediata l'interpretazione della variazione relativa è utile esprimerla in termini di tasso/saggio  $i$  di variazione:

$${}_0i_t = \frac{x_t - x_0}{x_0} = \frac{x_t}{x_0} - 1 = \text{variazione \%}$$

- Il tasso di variazione cumulato è pari al numero indice diminuito dell'unità

$${}_{2000}i_t = \frac{3.64 - 3.45}{3.45} = \frac{3.64}{3.45} - 1 = 0.055 * 100 = 5.5\%$$

# Numeri indici e loro variazioni

- Se tra il tempo 0 e il tempo  $t$  non è intervenuta alcuna variazione allora tale differenza è nulla. Se positiva/negativa vuol dire che si è avuto un aumento/diminuzione dell' $i$  %

<div>Var % \ t</div>	/	2001	2002	2003	2004
Bene 1	/	5.5	15.9	18.8	27.5
Bene 2	/	0.4	2.5	2.3	2.3

# Numeri indici a base mobile (.xls)

- La base è rappresentata dal termine che precede quello posto al numeratore del rapporto:

$$I_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}$$

Indice \ t	2000	2001	2002	2003	2004
Bene 1	100	105.5	109.9	102.5	107.3
Bene 2	100	100.4	102.1	99.8	100.0

➤ Serie degli indici a base mobile:

$${}_{2001}I_{2002} = \frac{4}{3.64} * 100 = 109.9$$

➤ Variazioni

Var % \ t	/	2001	2002	2003	2004
Bene 1	/	5.5	9.9	2.5	7.3
Bene 2	/	0.4	2.1	-0.2	0.0

# Le proprietà degli indici elementari

(.xls)

1. **Condizione di identità:** il numero indice calcolato per il periodo base è uguale a 1

$${}_t I_t = \frac{x_t}{x_t} = 1 (= 100)$$

2. **Condizione di reversibilità delle basi:** l'indice per il tempo t in base s coincide con il reciproco dell'indice per il tempo s calcolato in base t

$${}_s I_t = \frac{x_t}{x_s} = \frac{1}{\frac{x_s}{x_t}} = \frac{1}{{}_t I_s}$$

$${}_{2000} I_{2002} = 115.9 = \frac{4}{3.45} = \frac{1}{\frac{3.45}{4}} = 1 / 0.8652 * 100 = 115.9 = \frac{1}{{}_{2002} I_{2000}}$$

# Proprietà degli indici elementari

## 3. Condizione di transitività: dati due numeri indici,

➤ Indice in base  $r$  del periodo  $s$

➤ Indice in base  $s$  del periodo  $t$

- sotto tale condizione deve essere possibile portare la base del secondo indice da  $s$  a  $r$  moltiplicando i due indici tra loro, ossia concatenando i due indici

$${}_r I_s * {}_s I_t = \frac{x_s}{x_r} * \frac{x_t}{x_s} = {}_r I_t$$

Esempio (Bene 2):

$${}_{2000} I_{2002} * {}_{2002} I_{2003} = \frac{x_{2002}}{x_{2000}} * \frac{x_{2003}}{x_{2002}} = {}_{2000} I_{2003} = \frac{x_{2003}}{x_{2000}}$$

# Proprietà degli indici elementari (.xls)

- In virtù della 3 è possibile operare cambiamenti di base :
  - passare da numeri indici a base fissa a indici con diversa base fissa (ribasamento)

$$\frac{{}_r I_t}{{}_r I_s} = {}_s I_t$$

- passare da numeri indici a base fissa alla corrispondente serie di numeri indici a base mobile

$$\frac{{}_0 I_t}{{}_0 I_{t-1}} = {}_{t-1} I_t$$

- da indici a base mobile a indici a base fissa (es. Bene1)

$${}_0 I_1 * {}_1 I_2 * \dots * {}_{t-1} I_t = {}_0 I_t \quad 105.5 * 109.9 * 102.5 * 107.3 = {}_0 I_t = 127.5$$

# Proprietà degli indici elementari

## 4. Condizione di commensurabilità:

l'indice è indipendente dall'unità di misura del fenomeno, cioè non varia se muta l'ordine di grandezza dell'unità di misura impiegate per esprimere il fenomeno  $X$  (prezzo al chilo, all'etto o per tonnellata)

# Proprietà degli indici elementari (.xls)

## 5. Condizione di scomposizione delle cause:

l'indice di un prodotto è uguale al prodotto degli indici

$$\frac{v_t}{v_0} = \frac{p_t * q_t}{p_0 * q_0} = \frac{p_t}{p_0} * \frac{q_t}{q_0}$$

Esempio:

<div>Bene1 \ t</div>	2000	2001	2002	2003	2004
Prezzo	3.45	3.64	4	4.1	4.4
Quantità	3	5	4	7	2
Valori	10.35	18.2	16	28.7	8.8

$$\frac{v_{2003}}{v_{2000}} = \frac{p_t * q_t}{p_0 * q_0} = 277.3 = \frac{p_t}{p_0} * \frac{q_t}{q_0} = 118.8 * 233.3 = 277.3$$



# Gli indici sintetici: questioni preliminari

➤ Quali merci prendere in considerazione e il loro numero

➤ Scelta della base degli indici elementari

La base può essere fissa o mobile

Nel caso di base fissa la scelta è in genere verso un valore della serie che sia abbastanza “normale”, non troppo alto o troppo basso. Perché con il livello dell'indice avremo sempre un riferimento rispetto al periodo base

# Gli indici sintetici

- Scelta dell'operatore statistico (quale media) adottare per la sintesi degli indici elementari e l'eventuale sistema di ponderazione

Le medie che si possono usare sono:

- media aritmetica

$${}_0I_{t(M)} = \frac{\sum \frac{{}_h x_t}{{}_h x_0}}{k}$$

- media geometrica

$${}_0I_{t(Mg)} = \sqrt[k]{\prod \frac{{}_h x_t}{{}_h x_0}}$$

- media armonica

$${}_0I_{t(Ma)} = \frac{k}{\sum \frac{{}_h x_0}{{}_h x_t}}$$

- non esiste una regola generale, ma trova largo impiego la media aritmetica

# Proprietà della media geometrica

Dall'eguaglianza

$$\sqrt[k]{\prod_h \frac{x_t}{x_0}} = \frac{\sqrt[k]{\prod_h x_t}}{\sqrt[k]{\prod_h x_0}}$$

- l'indice sintetico può essere calcolato senza calcolare gli indici elementari delle singole serie
- compensa variazioni della stessa intensità ma di segno opposto; la media aritmetica tiene maggiormente conto degli indici elementari superiori a 100 che non di quelli inferiori a 100  
(bene 1:  $x_0=10$ ,  $x_t=20$  / bene 2:  $x_0=100$ ,  $x_t=50$ )

$${}_0I_{t(M)} = \left( \frac{20}{10} + \frac{50}{100} \right) / 2 = 1.25 \quad {}_0I_{t(Mg)} = \sqrt{\frac{20}{10} * \frac{50}{100}} = 1$$

# La ponderazione

- L'aggregazione di indici elementari può essere fatta con o senza ponderazione
- La struttura di ponderazione permette di tenere conto della diversa importanza degli indici elementari che si stanno aggregando
- Ad esempio: se si aggregano i prezzi dei beni al consumo, i pesi saranno in proporzione dell'importanza del bene consumato sul totale dei consumi (es. della quota di spesa)
  - La dimensione dei pesi concorre a determinare l'entità delle variazioni con esso misurate
  - Le ponderazioni possono essere fisse o variabili

# La ponderazione

- La ponderazione di un indice sintetico di prezzo può tenere conto dell'importanza dei numeri indici elementari mediante:

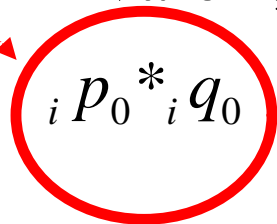
➤ le quantità

$${}_0I_t = \frac{\sum \frac{{}_iP_t}{{}_iP_0} {}_iq_0}{\sum {}_iq_0} \qquad {}_0I_t = \frac{\sum \frac{{}_iP_t}{{}_iP_0} {}_iq_t}{\sum {}_iq_t}$$

(del periodo base o del tempo t)

Valore al tempo 0

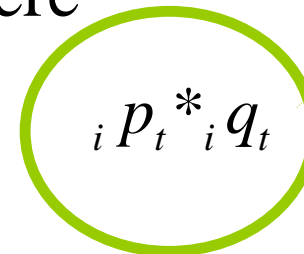
➤ i valori, i cui pesi possono essere



$${}_iP_0 * {}_iq_0$$

$${}_iP_0 * {}_iq_t$$

$${}_iP_t * {}_iq_0$$



$${}_iP_t * {}_iq_t$$

Valore al tempo t

# Gli indici più impiegati (prezzi)

- Le formule più usate per la costruzione di numeri indici, proposte a fine '800, sono
  - l'indice di prezzo Laspeyres (base fissa e ponderazione fissa):

$${}_0I_t^L = \frac{\sum_i \frac{p_t}{p_0} p_0 q_0}{\sum_i p_0 q_0} = \frac{\sum_i p_t^* q_0}{\sum_i p_0^* q_0}$$

- L'indice di Laspeyres: misura la variazione relativa temporale del costo di un paniere di merci fissato nel tempo base

# Gli indici più impiegati (prezzi): Laspeyres

$${}_0I_t^L = \frac{\sum_i \frac{p_t}{p_0} p_0 q_0}{\sum_i p_0 q_0} = \frac{\sum_i p_t^* q_0}{\sum_i p_0^* q_0}$$

- Aggregando gli indici elementari di prezzo con un peso pari all'incidenza della relativa spesa nel periodo base sul totale
- Come rapporto tra il valore della spesa al tempo t sulla base delle quantità del tempo 0 e la spesa del tempo 0

# Gli indici più impiegati (prezzi)

- l'indice di prezzo Paasche (base fissa e ponderazione variabile):

$${}_0I_t^P = \frac{\sum_i \frac{p_t}{p_0} p_0 q_t}{\sum_i p_0 q_t} = \frac{\sum_i p_t^* q_t}{\sum_i p_0^* q_t}$$

- L'indice di Paasche: misura la variazione relativa temporale del costo di un paniere di merci fissato nel tempo corrente



# Gli indici più impiegati (prezzi): Paasche

$${}_0I_t^P = \frac{\sum_i \frac{P_t}{P_0} P_0 q_t}{\sum_i P_0 q_t} = \frac{\sum_i P_t^* q_t}{\sum_i P_0^* q_t}$$

“è il rapporto tra le quantità di oggi valorizzate ai prezzi di oggi e le stesse valorizzate ai prezzi ieri”

- Aggregando gli indici elementari di prezzo con un peso pari all'incidenza della spesa calcolata sulla base delle quantità del periodo t e i prezzi del periodo base
  - quanto avrebbe inciso la spesa per “pollo fresco” se avessi comprato ai prezzi di allora le quantità di oggi
- Come rapporto tra il valore della spesa al tempo t e la spesa del tempo t tenendo fermi i prezzi al tempo 0

# Gli indici più impiegati (prezzi)

- L'indice di Laspeyres è uguale a quello di Paasche se e solo se è NULLA la correlazione tra la variazione di prezzo e la variazione di quantità
- La variazione relativa delle quantità deve essere indifferente a quelle dei prezzi. Ossia i beni i cui prezzi sono variati di più (aumentati/diminuiti) non devono presentare sistematicamente anche le maggiori variazioni delle quantità e viceversa
- Solitamente al crescere del prezzo la quantità domandata scende: l'indice dei prezzi di Laspeyres tende ad essere superiore a quello di Paasche
- si dice che “l'indice di Laspeyres tende a muoversi verso l'alto, quello di Paasche verso il basso”

# Gli indici più impiegati (prezzi) (.xls)

Al fine di neutralizzare queste opposte tendenze:

➤ l'indice (ideale) di prezzo di Fisher:

$${}_0I_t^F = \sqrt{{}_0I_t^L * {}_0I_t^P} = \sqrt{\frac{\sum_i p_t^* q_0}{\sum_i p_0^* q_0} * \frac{\sum_i p_t^* q_t}{\sum_i p_0^* q_t}}$$

➤ Media geometrica degli indici di Laspeyres e Paasche

➤ “Ideale” perché soddisfa quasi tutte le proprietà

## Gli indici più impiegati (quantità)

- Le formule più usate per la costruzione di numeri indici, proposte a fine '800, sono

➤ l'indice di quantità Laspeyres (base fissa e ponderazione fissa):

$${}_0I_t^L = \frac{\sum_i \frac{q_t}{q_0} p_{0i} q_0}{\sum_i p_{0i} q_0} = \frac{\sum_i p_{0i} q_t}{\sum_i p_{0i} q_0}$$

➤ l'indice di quantità Paasche (base fissa e ponderazione variabile):

$${}_0I_t^P = \frac{\sum_i \frac{q_t}{q_0} p_{ti} q_0}{\sum_i p_{ti} q_0} = \frac{\sum_i p_{ti} q_t}{\sum_i p_{ti} q_0}$$

# Gli indici più impiegati (quantità) (.xls)

➤ l'indice (ideale) di quantità di Fisher:

$${}_0I_t^F = \sqrt{{}_0I_t^L * {}_0I_t^P}$$

# Proprietà ideali degli indici sintetici

## 1. Condizione di identità:

il numero indice calcolato per il periodo base è uguale a 1 (100)

$${}_t I_t = \frac{x_t}{x_t} = 1 * 100 = 100$$

E' soddisfatta da tutti e tre gli indici sintetici!!

# Proprietà ideali degli indici sintetici (.xls)

## 2. Condizione di reversibilità delle basi:

l'indice calcolato per il tempo  $t$  in base  $s$  coincide con il reciproco dell'indice per il tempo  $s$  calcolato in base  $t$

$${}_s I_t = \frac{x_t}{x_s} = \frac{1}{\frac{x_s}{x_t}} = \frac{1}{{}_t I_s}$$

Solo l'indice di Fisher la soddisfa!!

# Proprietà ideali degli indici sintetici

## 3. Condizione di commensurabilità:

l'indice è indipendente dall'unità di misura del fenomeno, cioè non varia se muta l'ordine di grandezza dell'unità di misura impiegate per esprimere il fenomeno  $X$

Tutti e tre gli indici sintetici la soddisfano!!



# Proprietà ideali degli indici sintetici

## 4. Condizione di determinatezza:

un indice non deve annullarsi né diventare un valore infinito o indeterminato se si annulla o tende all'infinito un termine della formula

Tutti e tre gli indici sintetici la soddisfano!!

## Quesito...(slide 22-24)

- L'abbonamento a internet diventa gratuito...e il numero degli abbonamenti decuplica...
  - Quale impatto sull'indice dei prezzi al consumo alla Laspeyres?
  - Quale impatto sull'indice dei prezzi al consumo alla Paasche?
- Finita la Pasqua non si vendono più le uova di cioccolata...
  - Quale impatto sull'indice dei prezzi al consumo alla Laspeyres?....dipende se le uova hanno un prezzo?
  - Quale impatto sull'indice dei prezzi al consumo alla Paasche?

# Proprietà ideali degli indici sintetici

## 5. Condizione di proporzionalità:

Se tutti i prezzi variano nella stessa proporzione da 0 a  $t$ , allora l'indice deve variare proporzionalmente nella stessa misura

Tutti e tre gli indici sintetici la soddisfano!

# Proprietà ideali degli indici sintetici

## 6. Condizione di transitività:

Dati l'indice in base  $r$  del periodo  $s$  e l'indice in base  $s$  del periodo  $t$

- sotto tale condizione deve essere possibile portare la base del secondo indice da  $s$  a  $r$  moltiplicando i due indici tra loro

$${}_r I_s * {}_s I_t = {}_r I_t$$

Nessuno dei tre indici la soddisfa!!

# Proprietà ideali degli indici sintetici

- Verifica per l'Indice dei prezzi di Laspeyres

$${}_r I_s^L * {}_s I_t^L = \frac{\sum_i p_s^* q_r}{\sum_i p_r^* q_r} * \frac{\sum_i p_t^* q_s}{\sum_i p_s^* q_s} \langle \rangle \frac{\sum_i p_t^* q_r}{\sum_i p_r^* q_r}$$

# Cambiamenti di base e indici sintetici nella pratica

- Il cambiamento di base soddisfa l'esigenza di disporre di un'informazione più aderente alla realtà, tuttavia, adottando indici sintetici, si pone un problema:
  - concatenare indici la cui struttura di ponderazione e il cui paniere cambia ogni volta che viene adottato un nuovo periodo base

# Cambiamenti di base e indici sintetici nella pratica

- Abbiamo visto che a rigore di logica il concatenamento non sarebbe operazione possibile con gli indici sintetici presi in considerazione. Tuttavia, se le modifiche introdotte non sono marcate, esso rappresenta una risposta approssimata alla necessità pratica di avere a disposizione serie storiche di lungo termine senza tuttavia perdere la rappresentatività del paniere.

# Cambiamenti di base e indici sintetici nella pratica (xls.)

- Il concatenamento si esegue con i coefficienti di raccordo (che si richiamano alla condizione di transitività).

➤ Esempio

portiamo in base 1995=100 un indice al mese  $m$  del 2006 calcolato in base dicembre 2005

$${}_{1995}I_{m,2006} = \frac{{}_{1995}I_{12,2005}}{{}_{12,2005}I_{12,2005} (=100)} * {}_{12,2005}I_{m,2006}$$

Coefficiente di concatenamento/raccordo  
Generalizzando...coefficienti di ribasamento



# Proprietà ideali degli indici sintetici

## 7. Condizione di scomposizione delle cause (o reversibilità dei fattori):

l'indice del valore o della spesa deve essere uguale al prodotto dell'indice dei prezzi per quello delle quantità

$${}^p I_t \ast {}^q I_t = {}^v I_t$$

Solo l'indice di Fisher la soddisfa!!

# Proprietà ideali degli indici sintetici (xls.)

- La condizione di scomposizione delle cause è soddisfatta in senso debole dagli indici di Laspeyres e Paasche

$${}_0^v I_t = {}_0^p I_t^L * {}_0^q I_t^P = {}_0^p I_t^P * {}_0^q I_t^L$$

- Da cui:
  - rapportando un indice di valore a un indice di quantità alla Laspeyres si ottiene un indice di prezzo alla Paasche (deflatore contabilità)
  - deflazionando un indice di valore, mediante un indice di prezzo alla Laspeyres si ottiene un indice di quantità alla Paasche (vendite al dettaglio)

## Nella pratica...

- Nell'ambito dei numeri indici sintetici ponderati l'indice più impiegato è generalmente quello di Laspeyres poiché esso risulta più pratico ed immediato rispetto agli altri
  - Per calcolare un indice di Laspeyres è infatti necessaria solo la conoscenza dei valori monetari al tempo base
  - nel caso dell'indice di Paasche è necessario conoscere anche le quantità in ogni periodo (idem Fisher)

## Esercizio...su file excel...

- Utilizzando dati su valore delle vendite e volumi di:
  - Acqua non gasata
  - Gelati
  - Mozzarelle
- Costruire Indici sintetici di prezzo e quantità di:
  - Laspeyres
  - Paasche
  - Fisher
- Verificare le proprietà di:
  - Reversibilità delle basi
  - Scomposizione delle cause



- Un utile sommario di quanto detto in:
  - Predetti A. *I numeri indici - Teoria e pratica*, Giuffré Editore